Absoluta Generalidad y Validez lógica[1]

Eduardo Alejandro Barrio
Universidad de Buenos Aires - Conicet
eabarrio@gmail.com

Abstract: The aim of this paper is to investigate various limiting results about the concept of *validity*. In particular, I argue that assuming the absolute generality thesis, the higher-order logic with standard semantics and plural logic cannot be sufficiently expressive to capture its own concept of *validity*. Moreover, I show that several modifications of classical logic leads to the same results limiting.
Keywords: Validity Paradox; Higher-Order Languages; Plural Logic; Absolute Generality.

Resumen: El objetivo de este artículo es investigar diversos resultados limitativos acerca del concepto de *validez.* En particular, argumento que ninguna teoría lógica de orden superior con semántica estándar ni ninguna lógica plural puede tener recursos expresivos suficientes como para capturar su propio concepto de *validez* asumiendo absoluta generalidad. Además, muestro los mismos resultados limitativos para ciertas modificaciones de la lógica clásica.
Palabras clave: Paradoja de la Validez; Lenguaje de orden superior; Lógica Plural; Absoluta Generalidad.

[1] Este trabajo fue escrito durante mi estadía en la UFBA, Salvador, Brasil, como parte del Programa Professor Visitante do Exterior de la CAPES. Agradezco a Waldomiro J. Silva Filho por la invitación. También quiero agradecer a Abel Lassalle Casanave por su apoyo.

Recientemente, Hartry Field (2008) ha argumentado que la incorporación de un predicado que intente capturar la noción de *validez* de un lenguaje con recursos suficientes como para permitir diagonalización no produce paradoja alguna. Su posición se opone a la de Whittle (2004), Shapiro (2011), Murzi, (2013), Beall & Murzi, (2012), Murzi & Shapiro (201x) quienes han sostenido que *validez*, al igual que *verdad*, es un concepto contaminado con paradojas.[2] La estrategia argumentativa de Field parte de la idea según la cual validez entendida como *transmisión de verdad* puede expresarse en términos de ZFC. Lo que asegura esta capacidad expresiva de ZFC es el conocido resultado de Kreisel (1968) [*Squizing Argument*] para las teorías lógicas de primer orden. Este resultado asegura que las nociones de *validez intuitiva* y *validez modelo-teórica* son extensionalmente equivalentes. Y ya que esta última trabaja con interpretaciones conjuntistas, se seguiría que no puede haber una paradoja de la validez, a menos que ZFC sea inconsistente, bajo el cumplimiento del resultado mencionado. En este artículo argumento que este resultado no es suficiente como para mostrar que no existen paradojas alrededor de la validez lógica. De hecho, en particular, argumento que si se adoptan más recursos expresivos que los correspondientes a la lógica clásica de primer orden, el predicado de validez, al igual que el predicado veritativo, no puede expresarse consistentemente usando recursos conjuntistas. Esto es, ninguna teoría lógica de orden superior con semántica estándar puede tener recursos expresivos suficientes como para expresar su propio concepto de *validez*. Con ese propósito, explorando la estrategia de desarrollar lenguajes absolutamente generales que motiva la adopción tanto de lógicas de orden superior como de lógicas plurales, muestro que la pretensión de expresar validez produce trivialidad: hay una paradoja, de estructura similar a la Paradoja de Curry, que nos impide expresar el mencionado

[2] No todos los que aceptan la existencia de una paradoja vinculada a validez han sacado las mismas conclusiones a partir de la derivación de trivialidad. Whittle, por ejemplo, argumenta que la paradoja muestra que los dialetheistas necesitarán recurrir a una jerarquía de tipo tarskiana para expresar los predicados de *validez lógica*. Shapiro, Beall y Murzi argumentan que la paradoja nos conduce a abandonar la regla estructural de contracción.

concepto lógico. Muestro que este resultado depende de la falla de completitud que nos impide expresar validez como prueba (a diferencia de lo que ocurre con las teorías de primer orden). Por último, recientemente muchos has sido los intentos de modificar la lógica clásica a la luz de las paradojas semánticas. Entonces, muestro que tales intentos deberían ser extremadamente débiles, si se quiere capturar validez dentro de un lenguaje con generalidad absoluta, evitando trivialidad.

I.- La paradoja de la Validez

El proyecto de desarrollar lenguajes universales, es decir, lenguajes con máxima capacidad expresiva, incluye la necesidad de incorporar recursos auto-referenciales que permitan evitar la necesidad de jerarquías de lenguajes. Este recurso resulta indispensable para lograr capacidad expresiva suficiente como para hablar dentro del lenguaje de su propia semántica. Por supuesto, esto debe hacerse sin obtener trivialidad lógica. Este proyecto, además de incluir la necesidad de hablar con los recursos del lenguaje del predicado de verdad, debe incluir, para eliminar todo tipo de restricción semántica, la posibilidad de expresar *validez lógica*. Por supuesto, dado el *Teorema de Tarski,* tal proyecto no puede elaborarse, bajo la lógica clásica, ya que inmediatamente obtendríamos una teoría trivial. Sin embargo, recientemente revisar la lógica clásica a la luz de paradojas como la del mentiroso (sus refuerzos y revanchas) y la de Curry ha permitido desarrollar diversos enfoques vinculados al debilitamiento de las leyes lógicas de la negación y del condicional. Los más conocidos son los enfoques paracompletos (Kripke (1975), Field (2008)), que básicamente rechazan el principio de tercer excluido, adoptando modelos kripkeanos de punto fijo y los enfoques paraconsistentes (Priest (2006), Beall (2009)) que básicamente rechazan la ley de explosión adoptando modelos que permiten dialetheias. Luego de muchos esfuerzos es ampliamente aceptado que ambas estrategias tienen dificultades para expresar tanto una negación adecuada que evite todo tipo de revanchas como un condicional que no sea demasiado débil (esto es, que cumpla leyes como el Modus Ponens, Identidad y el Teorema de la Deducción). Es evidente que uno de los desafíos actuales más importantes para aquellos que trabajan en el proyecto de revisar la lógica a la luz de las paradojas semánticas es encontrar una lógica con un condicional apropiado que no permita derivar la Paradoja de Curry. En cualquier caso, sea este proyecto posible o no, los vínculos entre validez y transmisión de verdad nos hacen sospechar que la tarea de desarrollar una lógica dentro de un lenguaje capaz de expresar *validez* podría no ser sencilla. Veamos el detalle.

Sea L un lenguaje de primer orden con recursos autorreferenciales. Entonces, L debe tener algún mecanismo para nombrar sus propias expresiones. Sea '$<\Phi>$' el nombre de Φ. La estrategia que propone capturar validez en forma predicativa, tiene diversas opciones de acuerdo con la aridad del predicado de validez. Sólo por razones de simplicidad, focalicemos la atención en el caso diádico. Entonces, la idea es agregar a L un predicado de validez diádico $Val(\ldots,\ldots)$, para obtener un lenguaje $L+$, tal que $Val(<\Phi>, <\Psi>)$ valga si y sólo si el argumento que parte de Φ y concluye Ψ es lógicamente válido. [3] Nuevamente, la idea es que ese predicado sea primitivo. Y por supuesto, al haber adaptado el mencionado predicado, necesitamos dar una explicación adaptada del comportamiento lógico de esa expresión en el lenguaje. Sean VS_1 y VS_2 las reglas que nos permiten introducir y eliminar el predicado en cuestión:

$\vdash \vDash$

VS_1: Para toda fórmula Φ y Ψ:

Si: $\Phi \vdash \Psi$

Entonces: $\emptyset \vdash Val(<\Phi>, <\Psi>)$

[3] Por supuesto, sólo por razones de simplicidad, deberíamos restringir nuestra atención a argumentos de una sola premisa.

VS_1 codifica de manera natural la idea según la cual si tenemos una prueba de Ψ desde Φ, entonces el argumento con Φ como premisa y Ψ como conclusión es válido.

VS_2: Para toda fórmula Φ y Ψ:

$$\emptyset \vdash Val(<\Phi>, <\Psi>) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$$

VS_2 expresa que si un argumento es válido entonces si aceptamos sus premisas, aceptamos su conclusión.

Con todos estos requisitos que parecen admisibles, estamos en condiciones de formular la primera paradoja de la validez. En primer lugar, dado los recursos de *L+*, aplicamos diagonalización al predicado ‘Val(x, <⊥>)’ para obtener una oración tipo Curry tal que:

$$K \leftrightarrow Val(<K>, <\bot>)$$ [4]

En este punto, usando principios intuitivos para la validez podemos derivar una paradoja que por su semejanza con la de Curry, denominamos, V-Curry:

[1]	K	Suposición para la aplicación de VS_1.
[2]	$Val(<K>, <\bot>)$	1, Diagonalización.
[3]	$K \rightarrow \bot$	2, VS_2.
[4]	$\bot$	1, 3, Modus Ponens.
[5]	$Val(<K>, <\bot>)$	1 – 4, VS_1.
[6]	$K \rightarrow \bot$	5, VS_2.
[7]	K	5, Diagonalización.
[8]	$\bot$	6, 7, Modus Ponens.

Esta es la paradoja que se describe en Beall & Murzi (2012). Los recursos asumidos para obtener trivialidad son:

i) Lógica

[4] Lo más natural sería usar la aritmética de primer orden a tales efectos y diagonalizar usando el Teorema de Punto Fijo. Por razones de simplicidad expositiva, omitiré este recurso asumiendo que se puede diagonalizar en *L+* .

ii) Diagonalización

iii) VS_1 y VS_2

Nótese que esta versión de V-Curry presenta semejanzas con la paradoja de Curry tradicional. Al igual que lo que sucede en este último caso, en esta versión se pone en evidencia el uso de las reglas lógicas del condicional. De esta manera, VS_1 parece requerir que Val cumpla la versión correspondiente de Seudo Modus Ponens:

SMP $\quad \emptyset \vdash \text{Val}(<\Phi>, <\psi>) \rightarrow (\text{Val}(<\Phi>) \rightarrow \text{Val}(<\psi>))$

ya que deberíamos esperar que si $\text{Val}(<\Phi>, <\psi>)$, entonces siempre que sea $\text{Val}(<\Phi>)$, también será $\text{Val}(<\psi>)$. Y VS_2 parece requerir que Val cumpla con la siguiente versión restringida del Teorema de la Deducción:

DT $\quad$ Si $\Phi \vdash \psi$, entonces $\emptyset \vdash \text{Val}(<\Phi>, <\psi>)$

ya que deberíamos esperar que si cumple que si hay una prueba de ψ a partir de ϕ, tiene que cumplirse que hay una prueba sin el uso de ningún supuesto adicional de que $\text{Val}(<\Phi>, <\psi>)$.

Una estrategia usual frente a resultados como los anteriores es analizarlos como resultados limitativos. Aquí la prueba estaría limitando la capacidad de hablar de la *validez lógica* usando los mencionados recursos. Validez intuitiva, al igual que otros conceptos semánticos, sería una noción plagada de paradojas.

II.- Validez y la teoría de conjuntos

Recientemente, Hartry Field ha insistido en que, a pesar de los resultados presentados en el punto anterior, validez no puede ser un concepto paradójico, ya que “the notion of validity is to be ... defined in set-theory”.[5] Recordemos que desde un punto de vista intuitivo, los argumentos válidos son preservadores

[5] Field, 2008, p. 298.

necesarios de verdad desde las premisas a la conclusión: es imposible que todas sus premisas resulten verdaderas y su conclusión falsa. En teoría de modelos, usualmente se trabaja como si los modos de interpretar fueran estructuras conjuntistas. Así, que un razonamiento resulte válido depende de que para toda estructura conjuntista, si las premisas resultan verdaderas en cada una de esas estructuras, su conclusión también lo resulta. El enfoque modelo-teórico propone definir la noción de *consecuencia lógica* como preservación de verdad en *todos* los modelos conjuntistas intentando capturar el núcleo intuitivo de la noción de *preservación necesaria de verdad* de premisas a conclusión. En esta dirección, Field ha enfatizado en que la idea de *validez* entendida como *transmisión de verdad* puede ser capturada usando recursos conjuntistas del siguiente modo:

$$\mathrm{Val}\ (<\Phi>, <\psi>) \Leftrightarrow \ \Phi \vDash_{\mathrm{ZFC}} \psi$$

En particular, si un argumento es válido, entonces todo modelo en ZFC de sus premisas es un modelo de su conclusión y si no es válido, hay un contra-modelo en ZFC. Entonces, bajo este resultado, argumenta que no puede haber una paradoja de la validez, a menos que ZFC sea inconsistente y diagnostica que la derivación de V-Curry del punto anterior es inválida, ya que tiene una aplicación incorrecta de la regla de introducción de Val.

i) El Squeezing argument y la validez lógica:

La equivalencia extensional entre la validez lógica y la conjuntista es el resultado central vinculado al conocido Teorema de Kreisel para las teorías lógicas de primer orden. Este resultado garantiza, entre otras cosas, que las nociones de *validez intuitiva* y *validez (modelo-teórica)* son extensionalmente equivalentes. Su punto de partida es llamar la atención sobre las diferencias entre:

(i) La noción de *validez modelo teórica*, entendida como preservación de verdad en todas las interpretaciones conjuntistas (MT-validity)

(ii) La noción de *validez intuitiva* (I-validity) que expresa preservación de verdad en todo modo de interpretar.

(iii) La noción de *derivación* o *prueba*.

Una vez que se advierte que podría existir un hiato entre ambas nociones de validez, Kreisel argumenta negativamente de la siguiente manera:

(P1) [Corrección intuitiva]: Si ψ es derivable de Φ, entonces el argumento que va desde Φ a ψ es I-valido.

(P2) [Contra-modelo]: Si el argumento que va de Φ a ψ no es MT-válido, entonces el argumento que va desde Φ a ψ no es I-válido.

(P3) [Completitud] Si el argumento que va de Φ a ψ es MT-válido, ψ es derivable de Φ.

Desde (1)-(3) se sigue que:

(C) Un argumento es *MT-válido* ssi es *I-válido*.

Por supuesto, la premisa 1 parece estar justificada en el hecho de que cualquier sistema deductivo razonable debería producir pruebas preservadoras de verdad en sentido intuitivo. La premisa 3 se basa en el conocido resultado de completitud: el cálculo debería probar todos los casos de valideces. Finalmente, la premisa 2 establece el nexo entre las noción modelo teórica de validez y la noción intuitiva: si hay un contra-modelo de tamaño conjuntista, debería haber una interpretación en la cual no hay transmisión de verdad en sentido intuitivo.

Ahora bien, recordemos que Field usa este resultado para argumentar que no hay una paradoja de la validez. Y el argumento, parte del resultado según el cual el concepto de *validez de la lógica* es plenamente capturable usando la noción de *modelo conjuntista*. Entonces, agrega Field, si hubiera una paradoja vinculada al concepto de *validez intuitiva*, esos problemas tendrían una contrapartida en el concepto *modelo teórico*. Pero tal cosa conduciría a dudar sobre la consistencia de la teoría de conjuntos que usamos al elaborar los modelos de la noción de consecuencia modelo-teórica. Así, el punto de Field es que dado que parece implausible sostener que la teoría de conjuntos es inconsistente, entonces debería igualmente ser implausible sostener que validez conduce a una inconsistencia.

ii) La invalidez de las reglas de la validez:

Vinculado a esta réplica, Field ofrece un diagnóstico acerca de lo que estaría fallando en la derivación de trivialidad presentada en el punto anterior. Sus sospechas recaen sobre VS_1 : lo que estaría mal en la prueba de V-Curry es que para concluir Val(<Φ>, <Ψ>), la derivación $\Phi \vdash \Psi$ debería haberse obtenido simplemente por fundamentos lógicos (siempre que Val(<…>,<…>) capture el concepto de *validez lógica*.)[6] Y tal cosa, de acuerdo con Field, no es el caso, ya que hay más recursos involucrados en la prueba que recursos lógicos. Esto es, hay en la presunta prueba de trivialidad, recursos suficientes como para diagonalizar y recursos de la teoría de conjuntos para capturar validez intuitiva. Por eso, de acuerdo con Field, la aplicación de VS_1 no es correcta y entonces no habría una legítima paradoja de la validez. Analicemos el punto de Field con más detalle. Supongamos que podemos capturar la noción de *validez* usando los recursos de una teoría de conjuntos. Digamos que ZFC es esa teoría. Sea el predicado $Bew_{ZFC}(<\Phi>, <\Psi>)$ un predicado diádico de L que capture la noción de prueba en el lenguaje. Es decir, un predicado cuya interpretación pretendida es hay una prueba en ZFC de Ψ a partir de Φ. De este modo, en el caso especial en el cual una afirmación del lenguaje de ZFC es verdadera en el modelo estándar de ZFC, invalidez en ZFC coincidirá con $\neg Bew_{ZFC}$. Por eso, la V-Curry, que habla del predicado de *validez lógica*, debería poder expresarse en términos del

[6] Al igual que Field, Ketland (2012) y más recientemente Cook (2013)) han sospechado de VS_1. Ellos han argumentado que la validez lógica puede capturarse en PA y que por lo tanto, al menos que esta sea inconsistente, no puede haber una V-Curry.

predicado Bew_{ZFC}. Ahora bien, si la lógica clásica se aplica en este contexto, entonces:

O bien K es verdadera, pero $Bew_{ZFC}(<K>, <\bot>)$ o bien K es falsa pero $\neg Bew_{ZFC}(<K>, <\bot>)$

Es decir, en el lenguaje hay una oración V-Curry K que afirma su propia invalidez e indirectamente tiene una prueba en ZFC o es falsa y carece de prueba en ZFC. Sin embargo, de acuerdo con Field, no hay nada paradójico aquí. En el primer caso, deberíamos considerar inconsistente a ZFC, lo cual (si bien dados los resultados de Gödel, no puede probarse usando los recursos de ZFC) resulta implausible. En el segundo de los disyuntos, la oración expresa de ella misma que es falsa y no hay una prueba de ella en ZFC:

$\neg K \wedge \neg Bew_{ZFC}(<K>, <\bot>)$

Nótese de paso que hay un paralelismo con la oración de Gödel G_{ZFC} de ZFC. Recordemos que esta oración afirma (siendo verdadera) su imposibilidad de ser probada en ZFC. Por supuesto, dada la incompletitud, esta oración no puede ser probada con los recursos de ZFC. Pero, la oración K, a diferencia de G_{ZFC}, es una que normalmente diríamos que es falsa (no es lógicamente válida) aunque carece de prueba en ZFC. Esto es, K se parece más a la negación de Gödel G_{ZFC}.[7].
Y dada:

$\neg K \wedge \neg Bew_{ZFC}(<K>, <\bot>)$

es fácil ver que VS_1 falla: como K es definida, ¬K es equivalente a $\neg Val(<K>, <\bot>)$, pero esto es equivalente a: $\neg Val(<Val(<K>, <\bot>) \wedge K>, <\bot>)$, la cual, es una instancia de VS_1 que resulta inválida.

Otra manera de plantear las sospechas acerca de VS_1 es la siguiente. Supongamos que estamos desarrollando una "lógica de la validez" cuyas reglas

[7] Field (2008), p. 302.

de introducción y eliminación con VS_1 y VS_2. Adviértase el contraste entre las dos reglas siguientes de introducción de la validez:

$VS_1{}^{L}$	Si:	$\Phi \vdash_L \Psi$
	Entonces:	$\emptyset \vdash_{\text{V-logic}} Val(<\Phi>, <\Psi>)$
$VS_1{}^{L+V+ZFC}$	Si:	$\Phi \vdash_{L+V+ZFC} \Psi$
	Entonces:	$\emptyset \vdash_{\text{V-logic}} Val(<\Phi>, <\Psi>)$

donde "$\vdash_{\text{V-Logic}}$" es interpretado como la noción de consecuencia lógica en la "lógica de la validez", "$\vdash_L$" como la noción clásica de consecuencia lógica para los lenguajes de primer orden y finalmente "$\vdash_{L+V+ZFC}$" como la noción de consecuencia lógica a la que se le agregan los recursos de prueba de ZFC y las reglas de la lógica de la validez. $VS_1{}^{L}$ es correcta, pero insuficiente para probar V-Curry, $VS_1{}^{L+V+ZFC}$ permitiría probar trivialidad pero no es una regla lógica. Por lo cual, K que afirma su propia invalidez, no provoca perplejidad alguna: habría una teoría no lógica que prueba una oración que afirma no ser válida.

En suma, si validez intuitiva es capturable en ZFC, *VS_1* no es una regla lógicamente válida (una que transmita la verdad de premisas a conclusión) tal como muestra el contra-ejemplo de Field. Y si esto es así, no hay una demostración de trivialidad acerca de la noción de validez (a diferencia de lo que ocurre con la conocida oración del mentiroso). Así, deberíamos concluir que validez puede (consistentemente) ser expresada dentro de un lenguaje con recursos auto-refenciales, sin causar límites al proyecto de desarrollo de lenguajes semánticamente universales.

III.- Paradojas de la validez con recursos expresivos robustos.

En este apartado argumento que las razones ofrecidas por Field no son suficientes para mostrar que no existen paradojas alrededor de la validez lógica. En particular, mi punto es que si se adoptan más recursos expresivos que los correspondientes a ZFC formulado en primer orden, el predicado de *validez*, al igual que el predicado veritativo, no puede expresarse consistentemente usando recursos conjuntistas.

i) *Validez no puede capturarse usando ZCF para las lógicas de orden superior*

Recuérdese que la primera razón que Field ofrece para desarticular la paradoja de la validez es que si esta existiera, ZFC sería inconsistente, dado que el predicado de validez es capturable dentro de ZFC. Sin embargo, es importante notar que el predicado de validez lógica solamente puede ser capturado por medio de los recursos expresivos de ZFC, tal como establece el resultado de Kreisel, bajo la condición de la completitud lógica (premisa 2 del argumento). Pero, es bien conocido que *no hay* un resultado análogo para lenguajes de segundo orden con semántica estándar. [8] Y por supuesto, no hay nada peculiar con los lenguajes de segundo orden. En general, no existe un cálculo completo para la lógica de orden superior. Esto es, el conjunto de fórmulas y argumentos válidos de este tipo de sistemas no es recursivamente enumerable. Por lo tanto, y a diferencia de lo que sucede en el caso analizado por Field, no puede haber un sistema deductivo efectivo y completo que pruebe todas las fórmulas y argumentos válidos de un lenguaje con cuantificadores con variables predicativas. Esto significa que para el caso de estos lenguajes, no tenemos garantías respecto de la coincidencia extensional entre la validez resultante de tomar las interpretaciones permitidas por ZFC y la validez producto de hacer reinterpretaciones intuitiva. Por eso, validez para estos lenguajes excede por completo los recursos expresivos de ZFC y por supuesto, ese concepto podría ser inconsistente, sin que eso afecte a ZFC.

[8] En las lógicas de orden superior con semántica estándar (full semantics), en cada modelo las variables de orden superior tienen un rango sobre el conjunto potencia del dominio de discurso. Esto permite ganar capacidad expresiva respecto de los sistemas de primer orden. Por supuesto, es conocido que hay modelos de estos lenguajes (Henkin models) en donde se restringen esas asignaciones. Estas lógicas son equivalentes a las lógicas multivualuadas de primer orden (many-sorted first-ordel logic) y se puede probar la existencia de un sistema de prueba efectivo que capture el conjunto de las fórmulas válidas. Esto resultado se logra a costa de pérdida de poder expresivo.

Recordemos que una lógica de segundo orden amplia los recursos expresivos de los lenguajes de primer orden permitiendo, además de los usuales cuantificadores de primer orden, cuantificadores sobre posiciones predicativas del tipo: '$\forall$ X' y '$\exists$ X'. Una lógica de orden superior puede presentarse como un sistema de deducción natural con reglas de introducción y eliminación para los "nuevos" cuantificadores y un axioma esquema de comprensión :

$$\exists X^2 \forall x_1,\ldots, x_n, (X^2 x_1,\ldots, x_n \leftrightarrow \Phi)$$

(donde 'X^2' no puede ocurrir en Φ). Intuitivamente, el axioma debe leerse de la siguiente manera: toda fórmula determina una relación. Ahora bien, sea Val(<…>, <...>) el presunto predicado de validez de la lógica de segundo orden. Esto es, Val(<…>, <...>) intenta capturar la propiedad de transmisión de verdad en todo modo de interpretar. Mi punto es que un resultado determinante en la discusión con Field es que, a diferencia de lo que pasa con las teorías lógicas de primer orden, el predicado de validez de segundo orden no puede ser capturado en ZFC. Veamos por qué: Sea '$\vDash_{ZFC2}$' la noción de validez de segundo orden, '$\vdash_{ZFC2}$' la noción de prueba de segundo orden y G^{ZFC2} su oración de Gödel, basándonos en que los sistemas deductivos deben ser finitamente axiomatizables, y que aunque su oración de Gödel sea semánticamente válida, ZFC2 no la puede demostrar como teorema (por el primer Teorema de Gödel), es fácil ver que no hay un predicado Val tal que cumpla las dos reglas de la validez. Si lo hubiera, ZFC2 debería ser completa y no lo es. Es decir, ya que '$\vDash_{ZFC2} G^{ZFC2}$, pero $\nvDash_{ZFC2} G^{ZFC2}$, no hay manera de capturar validez lógica para un lenguaje de segundo orden usando los recursos conjuntistas correspondientes. Por supuesto, no hay nada esencial en el ejemplo que remita al caso de segundo orden. Es decir, dado la incompletitud, la noción de *validez* para cada uno de los ordenes no puede ser capturada en ese orden usando sólo recursos conjuntivas expresables en ese mismo orden.

Otra manera de enfatizar mi punto es la siguiente: en los lenguajes de orden superior, interpretaciones de distinta cardinalidad desempeñan papeles expresivos reales. Lo anterior permite, por ejemplo, expresar dentro de un lenguaje de segundo orden las interpretaciones de máxima generalidad de los lenguajes de primer orden. Esto es, podemos usar estos lenguajes como parte de la teoría de modelos para hablar de aquellas totalidades "demasiado grandes" como para ser autorizadas como parte de la ontología de ZFC formalizada en primer orden. Esto nos posibilita, por ejemplo, ampliar los recursos dentro de la teoría de modelos con el propósito de permitir expresar una interpretación que capture absolutamente todos los objetos. La misma involucra una doble dimensión. Por un lado, hay un compromiso con la idea de que hay lenguajes con recursos expresivos suficientes como para cuantificar de manera completamente irrestricta. Por otro, hay una manera de hablar de un dominio absolutamente general sobre los cuales las variables vinculadas a los cuantificadores reciben sus valores. Esta capacidad permite capturar aquellas situaciones "reales" en las cuales interpretamos premisas y conclusión con modelos que no podrían ser representados como parte de los recursos expresivos de ZFC formalizada en primer orden.

En síntesis, ya que no vale el resultado de Kreisel, y asumiendo que como parte de las necesidades expresivas queremos capturar una interpretación absolutamente general, la noción de *validez* excede la complejidad expresiva de ZFC. Siendo Val_{LSO} (<…>, <…>) un predicado de un lenguaje de segundo orden extendido con un predicado diádico de validez, se rompe la equivalencia:

$$Val_{LSO}(<\Phi>, <\psi>) \Leftrightarrow \Phi \vDash_{ZFC} \psi$$

abriendo la posibilidad de que el lado izquierdo resultara ser inconsistente si se agregan las reglas de Val_{LSO} a la lógica de segundo orden, sin que lo fuera la noción del lado derecho.

ii) Validez no puede capturarse usando ZCF para las lógicas plurales

Este movimiento de ampliar los recursos expresivos de la teoría de modelos usando lenguajes de orden superior para capturar mejor los modos de interpretar intuitivos, incluyendo aquellos que permiten absoluta generalidad, también ha sido realizado usando cuantificación plural. Las expresiones plurales como "algunas cosas" son foco de atención en la lógica plural. En la lógica plural, además de estos recursos expresivos vinculados a la cuantificación singular de primer orden, tenemos variables plurales como xx e yy, las cuales pueden ser ligadas por cuantificadores plurales. En los lenguajes plurales, el cuantificador universal plural "∀ xx" es interpretado como "cualesquiera objetos xx tales que" y el cuantificador existencial "∃ xx" como "hay algunas cosas tales que". Además, contamos con un predicado plural lógico '≺' que debe ser leído como '…es uno de los…' . Los principios que gobiernan los lenguajes plurales son lógicamente válidos. Específicamente, una lógica plural puede ser presentada como un sistema de deducción natural con reglas de introducción y eliminación de los cuantificadores plurales y el siguiente axioma esquema de comprensión plural:

$$\exists\, x(\Phi(x)) \rightarrow \exists xx\, \forall x(x \prec xx \leftrightarrow \Phi(x))$$

(Lectura intuitiva: "asumiendo que hay al menos un Φ, algunas cosas son tales que algo es uno de ellos justo en el caso en el cual es un Φ".)

A partir de los trabajos de Boolos y usando lenguajes plurales, podemos hablar consistentemente de todos los conjuntos sin presuponer que esa totalidad forme un conjunto:

$$\exists\, xx\, \forall\, x(x \prec xx)$$ [9]

Ahora bien, la extensión expresiva de los lenguajes de primer orden con plurales, al igual que el mencionado recurso a los lenguajes de segundo orden, nos permite describir modelos vistos no como un conjunto, sino como una pluralidad de objetos. Hay diversas maneras en que esta idea puede ser implementada. Sin entrar en mayores detalles técnicos, se puede decir que el lenguaje desde el cual

[9] Es importante destacar que el contar con tales recursos expresivos no supone ningún tipo de incremento ontológico. Por ejemplo, podemos expresar el dominio de ZF, hablando de "los conjuntos" sin que nos comprometamos con ninguna nueva entidad. Una pluralidad de objetos sólo está formada por los objetos que la conforman.

se expresa la interpretación de las fórmulas de un lenguaje de primer orden debe incluir recursos expresivos suficientes como para cuantificar sobre pluralidades y expresar predicados plurales. Es importante enfatizar que al igual que lo que sucede con los lenguajes de segundo orden, no hay un cálculo completo que permita axiomatizar el conjuntos de las fórmulas y argumentos válidos de la lógica plural. Por lo cual, como en el caso anterior, la estrategia de Kreisel tampoco puede aplicarse. Esto es, dado que no vale el resultado de Kreisel, la noción de *validez* excede la complejidad expresiva de ZFC. Se abre, entonces, la posibilidad de romper la equivalencia:

$$Val_{Lplural}(<\Phi>, <\psi>) \Leftrightarrow \Phi \vDash_{ZFC} \psi$$

por lo que el lado izquierdo puede ser inconsistente si se agregan las reglas de $Val_{Lplural}$ a la lógica plural, sin que lo fuera la noción del lado derecho.

iii) Hay V-Curry!

Diversos resultados conocidos, tanto respecto de la lógica de orden superior como de la de plurales, pueden ser de utilidad para evaluar la respuesta de Field a V-Curry. Rayo & Uzquiano han desarrollado un método para dar una definición de validez para lenguajes de segundo orden usando modelos plurales. Rayo (2006) ha extendido este método de definiciones de validez a lenguajes con expresiones plurales de cualquier orden. Recientemente, Linnebo & Rayo (2012) han mostrado resultados de equivalencia en las definiciones de *validez* dentro de la jerarquía de tipos transfinitos y de la de plurales. Una síntesis de los resultados relevantes para la discusión sobre la capacidad de expresar validez usando recursos de orden superior es la siguiente:

RESULTADO 1 (RAYO 2006): Asumiendo absoluta generalidad y lógica clásica, no se puede capturar validez de una lógica de segundo orden dentro de esa misma lógica.

Estrategia informal de prueba:

Sea *L* un lenguaje de segundo orden con recursos autorreferenciales. en el cual usamos diagonalización a tales efectos. Agregamos a un predicado de validez diádico *Val (...,...)*, para obtener un lenguaje *L+*, tal que *Val(<Φ>, <Ψ>)* valga si y sólo si el argumento que parte de Φ y concluye Ψ es lógicamente válido. Este agregado, debería tener una regla "adaptada" de introducción de *Val (…,...)* del tipo siguiente:

$VS_1{}^{L}$ Si: $\Phi \vdash_L \Psi$

Entonces: $\emptyset \vdash_{V\text{-logic}} Val(<\Phi>, <\Psi>)$

$VS_2{}^{L}$*:* Para toda fórmula Φ y Ψ:

$$\emptyset \vdash_{V\text{-logic}} Val(<\Phi>, <\Psi>) \rightarrow (\Phi \rightarrow \Psi)$$

Estas reglas son intuitivamente válidas en el sentido de ser preservadoras de verdad desde premisas a conclusión. [10] Sin embargo, tales reglas fueran parte de los recursos lógicos del sistema, no puede existir una teoría finitamente axiomatizable en un lenguaje con diagonalización que no sea trivial. Si la hubiera, esa suposición nos conduciría a una V-Curry para la un lenguaje de segundo orden como la formulada en el primer apartado. La regla de introducción de la validez para los lenguajes de segundo orden $VS_1{}^{L}$ incorpora como parte de los recursos lógicos todas las instancias permitidas (no impredicativas) del axioma esquema de comprensión de segundo orden. Al permitir diagonalizar sobre la propiedad de validez agregamos las instancias impredicativas prohibidas como instancias del axioma. Pero, entonces, las derivaciones del primer apartado muestran que validez no puede expresarse, si se quiere evitar la trivialidad.[11]

[10]La regla $VS_1{}^{L}$ permite romper el hiato señalado por Field entre las reglas lógicas y $VS_1{}^{L+V+ZFC}$, ya que incorpora como lógicos los recursos de segundo orden que permiten probar las verdades de ZFC.

[11] Nótese que, al igual que con verdad, el que una noción no pueda expresarse con los recursos de una teoría, no significa que no puede expresarse en ninguna teoría. Por ejemplo, Rayo (2006) muestra cómo expresar validez de una lógica de plurales desde un lenguaje con más recursos expresivos.

RESULTADO 2 (RAYO 2006): Asumiendo absoluta generalidad y lógica clásica, no se puede capturar validez de una lógica de plural dentro de esa misma lógica.

Estrategia informal de la prueba: recordemos que las lógicas plurales también hay un axioma esquema de comprensión con instancias impredicativas prohibidas. Por eso, las mismas razones que muestran el resultado anterior están disponibles para este caso.

RESULTADO 3 (Linnebo & Rayo 2011): Asumiendo absoluta generalidad y lógica clásica, no se puede capturar validez de un lenguaje plural de tipo infinito en un lenguaje plural de tipo infinito.[12]

Estrategia informal de la prueba:
No hay nada peculiar respecto de los lenguajes de segundo orden. Por eso, el resultado anterior puede ser generalizado a lenguajes de cualquier orden, incluso a lenguajes de tipo infinito.

En suma, en contra de lo afirmado por Field, tanto las lógicas de orden superior como las lógicas plurales tienen una noción de *validez* que no puede ser capturada dentro del propio lenguaje. La suposición contraria conduce a paradojas de la validez con la misma estructura que las presentadas en el primer apartado. Por supuesto, la estrategia usual de respuesta al problema de cómo capturar validez asumiendo absoluta generalidad para lenguajes de orden superior es el recurso a las jerarquías. Sin embargo, dados los deseos iniciales de desarrollar lenguajes semánticamente universales, esta estrategia debería evitarse.

iv) La validez de las reglas de la validez

[12] Los lenguajes de tipo infinito son analizados por Tarski (1935). Son lenguajes que poseen una infinidad de variables de tipos distintos. En su famoso postscript muestra que su *Teorema de Indefinibilidad de la Verdad* también se aplica a estos lenguajes (donde puede expresarse lo que él denomina teoría general de clases). El resultado mencionado aquí muestra que tampoco se puede capturar validez para este tipo de lenguajes.

Todos los resultados anteriores asumen que las reglas de la validez son válidas. Y recordemos que Field argumenta que no lo son. En particular, que la regla VS_1 no puede serlo, ya que contiene al menos una instancia inválida. Sin embargo, recuérdese que tales instancias surgen bajo la suposición de que en las teorías lógicas de primer orden, lo que es válido lógicamente puede expresarse con los recursos de ZFC. Pero, como he enfatizado, tanto en los lenguajes de orden superior como en los de la lógica plural, como consecuencia de la falla de de la equivalencia entre su concepto de *validez* y el concepto definible usando los recursos de ZFC, no podemos descartar el primer disyunto planteado por Field. Acaso, la oración K (que afirma su propia invalidez) es verdadera y la teoría prueba una inconsistencia, lo cual muestra que la teoría no puede expresar validez. Y bajo esta opción, no hay instancias inválidas de la regla VS_1 en ninguno de los sistemas mencionados (simplemente el segundo disyunto es falso.

IV) Y si validez no fuera un concepto clásico?

Otro de los puntos salientes en la argumentación de Field es razonar clásicamente respecto del concepto de validez lógica. Esta suposición se asumió al razonar clásicamente con respecto a la correspondiente oración en términos del concepto de prueba:

O bien K es verdadera, pero $Val_{ZFC}(\langle K \rangle, \langle \perp \rangle)$ o bien K es falsa pero $\neg Val_{ZFC}(\langle K \rangle, \langle \perp \rangle)$ [13]

De hecho, él afirma que “(these) considerations together seem to ... make the assumption that validity claims obey excluded middle a reasonable working hypothesis”. [14] Sin embargo, no es claro que validez deba ser un concepto clásico para aquellos que están dispuestos a modificar la lógica a la luz de las paradojas. Por ejemplo, recientemente Alan Weir (2006) ha propuesto modificar

[13] Quizás, como afirman los enfoques paracompletos, K no es ni verdadera ni falsa. O quizás como afirman los enfoques paraconsistentes K sea verdadera y falsa.
[14] Field, (2008), p. 307.

la lógica recurriendo a los enfoques kripkeanos de puntos fijos en el marco de los lenguajes que pueden expresar su propia semántica debilitando la lógica clásica. La propuesta incluye lograr absoluta generalidad para los cuantificadores de primer orden abandonando la clasicidad de las reglas lógicas (adoptando una suerte de enfoque paracompleto sofisticado).

Dependiendo de cómo se debilite la lógica clásica y de si esa lógica resultante tuviera una axiomatización completa, podríamos generar una V-Curry dentro de una lógica que acepte esa lógica revisada, intente capturar generalidad absoluta con sus cuantificadores y adopte las reglas de introducción y de eliminación de la validez. Es de gran importancia notar que los recursos lógicos usados en la derivación de V-Curry son extremadamente débiles. Se usan, además de las reglas de la validez, el Seudo Modus Ponens (SMP) y el Teorema de la Deducción (DT). Las versiones de V-Curry del primer apartado muestran que toda lógica incompleta que acepte Modus Ponens y el Teorema de la Deducción resultaría trivial. De lo que se sigue, para evitar la trivialidad, que validez para esa teoría debería ser inexpresable usando los recursos del sistema.

En síntesis, en este trabajo he intentado mostrar que hay legítimas paradojas de la validez. El punto clave ha sido prestar atención a los recursos lógicos disponibles. Esto es, Field tiene razón respecto de la noción de *validez lógica* de primer orden. Tal noción puede ser expresada consistentemente usando los recursos de ZFC, basados en el resultado de Kreisel. Pero, tanto las lógicas de orden superior, como las lógicas plurales así como las modificaciones de la lógica clásica para capturar las nociones semánticas, nos ofrecen recursos como para considerar a las reglas intuitivas preservadoras de verdad $VS_1{}^{L}$ y VS_2 como parte de los recursos lógicos. En todos estos casos, validez, al no ser recursivamente axiomatizable, no puede ser capturado en ZFC. Por eso, a diferencia del caso de primer orden, en cada uno de estos sistemas puede formularse una V-Curry que usa recursos lógicos productora de trivialidad. Lo cual significa en términos de recursos expresivos, que validez no puede ser expresada en cada uno de esas teorías.

Bibliografía

Beall, JC: 2009, *Spandrels of Truth* , Oxford UP.

Beall, J.C & Murzi, J.: 2013, "Two flavors of curry's paradox", *The Journal of Philosophy* C , 143–65.

Boolos, G. : 1984, "To Be is to Be a Value of a Variable (or to be Some Values of Some Variables)," *The Journal of Philosophy* 81, 430–49. Reprinted in Boolos (1998).

Boolos, G. : 1985, "Nominalist Platonism," *Philosophical Review* 94, 327–44. Reprinted in Boolos (1998).

Boolos, G. ,1998, *Logic, Logic and Logic*, Harvard, Cambridge, Massachusetts.

Cook, R.: 2012, "The T-schema is not a logical truth", *Analysis* 72(2), 231–239.

Cook, R.: 2013, "There is no paradox of logical validity". Forthcoming in *Logica Universalis*.

Field, H.: 2008, *Saving Truth from Paradox*, Oxford: Oxford University Press.

Gupta, A., Belnap, N., 1993, *The Revision Theory of Truth*, Cambridge, MA: MIT Press.

Ketland, J.: 2012, "Validity as a primitive." Forthcoming in *Analysis*.

Kreisel, G.: 1967, "Informal rigour and completeness proofs", in I. Lakatos (ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, pp. 138–171.

Kripke, S.: 1975, "Outline of a theory of truth", *Journal of Philosophy* 72, 690–716.

Murzi, J. : 2013, "The Inexpressibility of Validity" Forthcoming in *Analysis*

Murzi, J. & Shapiro, L.: 201x, "Validity and truth-preservation", en Achourioti, J., Fujimoto F. & Martinez-Fernandez, J. (eds), *Unifying the Philosophy of Truth*, Springer.

Priest, G. : 2006, *Doubt Truth to be a Liar*, Oxford University Press.

Rayo, A. : 2006, "Beyond Plurals" en Rayo, A & Uzquino, G. (eds) *Absolute Generality* Oxford: Oxford University Press,

Rayo, A. & Linnebo, O. : 2012, "Hierarchies Ontological and Ideological" *Mind* 121

Rayo, A., & Uzquiano, G. : 1999, "Toward a Theory of Second-Order Consequence," *The Notre Dame Journal of Formal Logic* 40.

Shapiro, L.: 2011, "Deflating logical consequence," *The Philosophical Quarterly* 61, 320–42.

Tarski, A. 1935: "The Concept of Truth in Formalized Languages" en Tarski, Alfred, 1956, *Logic, Semantics, Metamathematics.* Oxford: Oxford University Press.

Weir, A. : 2006, "Is It too much to Ask, to Ask for Everything" en Rayo, A & Uzquino, G. (eds) *Absolute Generality* Oxford: Oxford University Press.

Whittle, B.: 2004, "Dialetheism, logical consequence and hierarchy", *Analysis* 64(4), 318–26.